

## Trasformate omogenee

La posizione del punto medio dell'elemento terminale denominata TCP (Tool Center Point), è uno dei calcoli più importanti nel processo del controllo del robot.

Questo problema si risolve mediante la soluzione diretta e inversa, il cui sviluppo è stato esposto mediante un calcolo trigonometrico. Un procedimento più preciso e comodo utilizza il calcolo matriciale e le trasformate omogenee. Dopo aver ottenuto le equazioni si implementano in un programma mediante un linguaggio adeguato. Nello schema della figura possiamo vedere le coordinate delle articolazioni del modello cinematico del robot TeachMover. Una trasformazione qualsiasi nello spazio può essere

Espressione della trasformazione  $T$  corrispondente a una traslazione.

$$T = \text{Tras}(a, b, c) =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

definita da una matrice  $T$  di ordine  $4 \times 4$  che può rappresentare una rotazione, una traslazione, un allargamento, ecc. Se esiste un punto definito su un vettore puntiforme  $u$ , il punto finale dopo la trasformazione  $T$ , sarà il  $v$  e il suo valore si otterrà moltiplicando la matrice di trasformazione  $T$  per il vettore  $u$ . In robotica sono

particolarmente interessanti le trasformazioni riferite a rotazioni e traslazioni, che commenteremo di seguito.

### Traslazioni

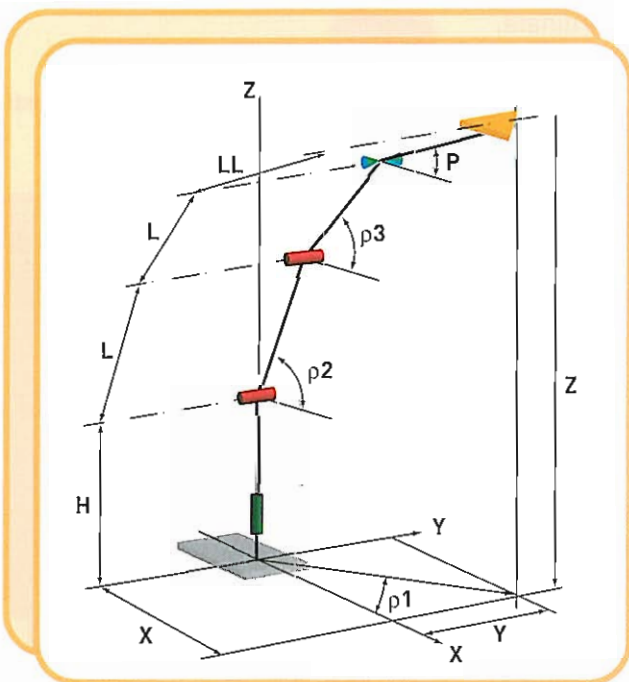
Una traslazione definita tramite il vettore  $a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j} + c \cdot \vec{k}$  viene data mediante la trasformazione  $T$  mostrata nella figura.

### Rotazioni

In modo simile alla traslazione, la rotazione intorno agli assi  $x, y, z$  si può definire mediante le matrici contenute nel riquadro della figura.

### Interpretazione delle trasformate omogenee

Anche se il calcolo matriciale esige una solida conoscenza matematica, la sua gestione è semplice, dato che le operazioni che si realizzano con le matrici



Angoli delle articolazioni e coordinate TCP (punto medio dell'elemento terminale) nel TeachMover.



a) "Rotazione dell'angolo  $\varphi$  attorno all'asse delle x"

$$\text{Rot}(\varphi, x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

b) "Rotazione dell'angolo  $\varphi$  attorno all'asse delle y"

$$\text{Rot}(\varphi, y) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

c) "Rotazione dell'angolo  $\varphi$  attorno all'asse delle z"

$$\text{Rot}(\varphi, z) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

**Definizione della trasformazione di rotazione attorno agli assi x, y, z.**

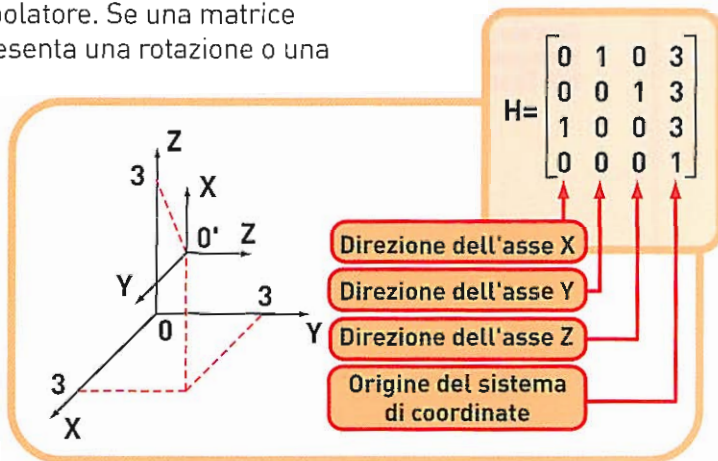
che si definiscono in queste trasformazioni. Le tre prime colonne della matrice determinano le direzioni dei tre nuovi assi, mentre la quarta colonna determina la posizione dell'origine del nuovo sistema di riferimento. Data una trasformazione H si può disegnare il sistema di riferimento risultante delle rotazioni traslazioni con esse definito, esaminando gli elementi della matrice. Inoltre è valido e possibile il sistema di lavoro inverso. Come applicazione pratica si indica nella figura una matrice trasformata H e il sistema di riferimento definito da essa.

utilizzano solamente le operazioni matematiche fondamentali e alcune regole facilmente comprensibili. Inoltre queste operazioni si possono risolvere con il computer.

Con questi strumenti matematici si possono gestire le trasformate omogenee che sono solo un modo per gestire le rotazioni e le traslazioni delle articolazioni del manipolatore. Se una matrice rappresenta una rotazione o una

traslazione dobbiamo solo realizzare un'operazione con essa, per passare da una posizione iniziale a un'altra finale in cui si realizza la trasformazione indicata. Gli elementi di una trasformazione omogenea possono essere interpretati come cinque vettori che descrivono il secondo sistema di coordinate, risultante dal realizzare un insieme di rotazioni, traslazioni

**Per realizzare i complessi calcoli matematici ad alta velocità i robot dispongono di potenti e robusti controller come quello mostrato nella fotografia.**



Ottenimento del sistema di riferimento definito dalla matrice di trasformazione H.

