

UN CIRCUITO TRA DUE PUNTI

Spesso ci si trova di fronte a circuiti la cui complessità può apparire disarmante. Vediamo una tecnica che in alcuni casi può trasformare una rete elettrica intricatissima in una equivalente davvero semplice...

Nei fascicoli precedenti abbiamo introdotto il concetto fisico di resistenza e spiegato come questa proprietà leghi la tensione ai capi di un elemento resistivo e l'intensità di corrente che lo attraversa. È sotto gli occhi di tutti, però, che l'attuale realtà dell'elettronica è costituita da circuiti con una complessità decisamente superiore a quelli visti finora. Eppure molte delle reti elettriche che all'apparenza sembrano estremamente complicate possono essere espresse attraverso una forma equivalente drasticamente più semplice. Ciò è possibile nel caso dei cosiddetti **'circuiti lineari'**, ossia

tutti quei circuiti composti esclusivamente da componenti che hanno un comportamento di tipo lineare. La **linearità** di un componente è una proprietà relativa al modello matematico che ne descrive il funzionamento. Affinché un modello possa essere definito 'lineare' deve poter essere descritto graficamente utilizzando una retta. Nella pratica, ciò vale sia nel caso dei normali resistori, per i quali ci si trova di fronte a un 'comportamento' algebrico, sia nel caso di condensatori e di elementi induttivi standard, in cui

la relazione è di tipo differenziale. Per il momento trascureremo queste ultime tipologie di componenti e ci concentreremo sui circuiti composti da reti di resistori. Questi ultimi, infatti, hanno un comportamento semplice, descritto, come detto, da un modello puramente algebrico, e, quindi, sono molto più facili da gestire rispetto a induttori e condensatori, che richiedono dimestichezza con strumenti matematici più complessi.



IL TEOREMA DI THÉVENIN

Un aiuto fondamentale nello studio dei circuiti lineari proviene da quello che è comunemente noto come teorema di Thévenin (dal nome dell'ingegnere francese L. C. Thévenin che lo ripropose usando come spunto le precedenti teorie del tedesco H. von Helmholtz). Tale teorema afferma che qualsiasi circuito lineare, indipendentemente dal suo grado di complessità, se analizzato tra due punti può essere modellizzato da un unico **generatore di tensione** (V_{TH}) posto in serie con un solo **resistore** (R_{TH}). Grazie a questo teorema si realizza una forma di **'semplificazione circuitale'** che si adatta particolarmente bene alle analisi delle reti elettriche lineari. Il modello prodotto, infatti, può essere impiegato per comprendere il comportamento di ogni circuito lineare a partire da due qualsiasi punti di riferimento, risultando estremamente utile nelle procedure di integrazione dei circuiti con nuovi componenti. La ricerca del modello di Thévenin è strutturata in due fasi: il calcolo del resistore e il dimensionamento del g.d.t. equivalenti. Proviamo a comprendere i due passi, applicando le regole pratiche del teorema al circuito resistivo mostrato in **figura 1**.

LA RESISTENZA DEL MODELLO DI THÉVENIN

Supponiamo di voler analizzare il circuito rispetto ai punti A e B. Iniziamo a ricavare il modello di Thévenin stabilendo il valore della resistenza equivalente al circuito rispetto ai punti A e B.



Lo schema circuitale preso in esame e, sotto, i valori dei componenti utilizzati:

- $V_1 = 5 \text{ V}$
- $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$
- $R_2 = 3 \text{ k}\Omega$
- $R_3 = 5 \text{ k}\Omega$
- $R_4 = 5 \text{ k}\Omega$

Per definizione, la resistenza di Thévenin equivale al valore resistivo visto tra i capi A e B in condizioni di **'passività'**. In generale, porre un circuito in questo stato significa **'spegnere tutti i generatori indipendenti'**. Per prima cosa, va annullata la differenza di potenziale imposta ai capi dei **generatori di tensione**, che divengono, così, **cortocircuiti**. In termini pratici, creare un cortocircuito tra due punti di una rete elettrica significa collegarli attraverso un elemento con una resistenza nulla (o, più realisticamente, prossima a 0 ohm) come un filo elettrico. Al contrario, quando si spengono i **generatori di corrente** si azzerà il flusso di cariche da essi imposto



nel ramo del circuito su cui agiscono. Quindi, i generatori di corrente verranno sostituiti con **circuiti aperti** (concretamente è come se si 'tagliasse' il circuito in concomitanza di tali elementi). Tornando al nostro esempio, portiamo il circuito di **figura 1** in condizioni di passività spegnendo l'unico generatore presente, V_1 . Poiché, come si vede dallo schema elettrico, V_1 è un g.d.t., sostituiamolo con un cortocircuito. Dopo tale operazione, la rete diverrà quella mostrata in **figura 2**. Calcoliamo adesso la resistenza 'vista' tra i punti A e B del circuito appena ottenuto (in pratica sarebbe come se applicassimo le sonde del tester in configurazione 'ohmetro' sui punti A e B). Se osserviamo il circuito dai punti presi in esame possiamo notare che vi è un parallelo di tre rami: il primo in cui è posto R_1 , il secondo in cui è presente R_4 e il terzo dove sono collocati R_2 e R_3 (in serie tra loro). Applicando le regole viste nel fascicolo 3, la resistenza complessiva è:

$$R_{TH} = R_{AB} = R_1 \parallel R_4 \parallel (R_2 + R_3)$$

(dove il simbolo '||' indica la 'somma in parallelo' e i valori usati sono quelli di **figura 1**). Ricordando che per i resistori in serie si sommano le resistenze, mentre per quelli in parallelo si sommano le conduttanze, la conduttanza tra A e B sarà:

$$\begin{aligned} G_{AB} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_2 + R_3} = \\ &= \left(\frac{1}{10k} + \frac{1}{5k} + \frac{1}{8k} \right) S = \\ &= (0,0001 + 0,0002 + 0,000125) S = \\ &= 0,425 \text{ mS} \end{aligned}$$



Passando infine dalla conduttanza alla resistenza:

$$R_{TH} = R_{AB} = \frac{1}{G_{AB}} = \frac{1}{(0,000425\text{ S})} = 2,353\text{ k}\Omega$$

IL GENERATORE DI TENSIONE EQUIVALENTE

Passiamo, ora, alla seconda fase dell'applicazione del teorema di Thévenin: il **dimensionamento del generatore di tensione**. Calcolare la differenza di potenziale del g.d.t. del modello di Thévenin è semplice. Essa equivale alla differenza di potenziale vista tra i punti A e B del circuito [questa volta, però, con i generatori accesi]. Per rendere più semplici i calcoli, ridisegniamo il circuito del nostro esempio (figura 4). Come è facile osservare, la differenza di potenziale tra A e B corrisponde alla caduta di tensione sul blocco formato dai resistori R_2 , R_3 e R_4 . Sostituiamo questi tre componenti con un unico elemento resistivo equivalente,



Abbiamo dimensionato il resistore dell'equivalente Thévenin del circuito iniziale. Per il caso preso in considerazione il valore calcolato è di 2,353 kΩ.

chiamato R_{234} . Quale sarà il suo valore? Calcoliamo il contributo resistivo dei tre componenti: abbiamo R_2 e R_3 in serie; la resistenza a loro equivalente ha quindi valore:

$$R_{23} = R_2 + R_3 = 3\text{ k}\Omega + 5\text{ k}\Omega = 8\text{ k}\Omega$$

I due resistori appena citati, sostituiti dalla loro resistenza equivalente R_{23} , sono a loro volta posti in parallelo con R_4 . Avremo, quindi:

$$R_{234} = \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_{23}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{5\text{ k}} + \frac{1}{8\text{ k}} \right)^{-1} \Omega = 3077\Omega$$

Sostituiamo, ora, il blocco formato dai resistori R_2 , R_3



In basso a sinistra, in figura 4, la ridisposizione dei componenti del circuito iniziale che evidenzia come la differenza di potenziale V_{AB} tra i punti A e B corrisponda alla caduta di tensione sul blocco formato dai resistori R_2 , R_3 , R_4 . In alto, in figura 5, il circuito ottenuto dopo aver sostituito i tre resistori R_2 , R_3 , R_4 con la resistenza equivalente R_{234} su cui cade V_{AB} .

e R_4 con l'elemento equivalente R_{234} che abbiamo appena ricavato. Il circuito semplificato ha una forma analoga a quella della rete mostrata in figura 5. Ci troviamo di fronte a quello che in elettrotecnica e in elettronica è comunemente chiamato **'partitore di tensione'**. I partitori di tensione non sono altro che particolari configurazioni di carichi resistivi nei quali la tensione imposta dal generatore viene 'ripartita' sui singoli componenti in maniera direttamente proporzionale alla loro resistenza. Calcoliamo ora la caduta di tensione sul resistore equivalente R_{234} . Utilizzando la legge di Ohm possiamo quantificare l'intensità di corrente I che scorre nel circuito. Tale corrente sarà pari al rapporto tra la tensione di alimentazione del circuito e la resistenza totale. La resistenza totale vista dal g.d.t. è data dalla 'somma' degli effetti di tutti i resistori presenti. Se percorriamo il circuito dal '+' al '-' del generatore incontriamo R_1 , seguito in serie dal blocco che abbiamo sostituito con la resistenza equivalente R_{234} . La resistenza totale del circuito, quindi, ha valore:

$$R_{TOT} = R_1 + R_{234}$$

Sostituendo, infine, i rispettivi valori numerici nella formula si ottiene:

$$I = \frac{V_1}{R_{TOT}} = \frac{5\text{ V}}{13077\Omega} = 0,000382\text{ A} = 0,382\text{ mA}$$

Una volta nota la resistenza elettrica totale del circuito,

possiamo applicare la legge di Ohm per calcolare l'intensità della corrente I uscente dal generatore di tensione V_s . La corrente I avrà valore:

$$I = \frac{V_s}{R_{TOT}} = \frac{5V}{13077\Omega} = 0,000382A = 0,382mA$$

Di conseguenza, la caduta di tensione sulla resistenza equivalente R_{234} sarà, sempre basandoci sulla legge di Ohm, di:

$$V_{TH} = V_{AB} = V_{234} = I \cdot R_{234} = 0,382mA \cdot 3077\Omega = 1,175V$$



Il risultato della ricerca dell'equivalente Thévenin del circuito iniziale.

Con quest'ultima operazione abbiamo terminato la ricerca del modello equivalente di Thévenin del circuito iniziale. Il risultato è mostrato in figura 6.

PER CONCLUDERE

Abbiamo così terminato la ricerca del modello equivalente di Thévenin. Ma come utilizzarlo ora nel concreto? L'approccio pratico è molto semplice: immaginiamo di voler aggiungere un nuovo componente (ad esempio un ulteriore resistore) ponendolo tra i punti A e B. Gli effetti elettrici su tale elemento possono essere calcolati in due modi: o analizzando il nuovo

circuito nella sua globalità, oppure calcolando il modello equivalente di Thévenin del 'vecchio' circuito e aggiungendo



il nuovo elemento in serie al resistore R_{TH} . Per renderci conto di quale sia l'utilità del modello equivalente, vediamo cosa accade inserendo il resistore $R_N = 15k\Omega$.

UN SEMPLICE ESEMPIO DI APPLICAZIONE

Con l'aggiunta del nuovo resistore il circuito apparirà come in figura 7 (il resistore appena aggiunto è stato evidenziato in rosso). Ora applichiamo il teorema di Thévenin per calcolare la caduta di tensione e l'intensità di corrente sul componente appena inserito. Per prima cosa consideriamo il circuito semplificato che abbiamo

ricavato in precedenza (figura 6) e colleghiamo R_N in serie a R_{TH} . Otterremo il circuito mostrato in figura 8. Come si osserva, siamo ancora in presenza di un partitore di tensione formato dai due resistori R_{TH} e R_N . Calcoliamo l'intensità della corrente elettrica che attraversa R_N . Analogamente a quanto già visto, tale valore sarà:

$$I_{RN} = \frac{V_{TH}}{R_{TH} + R_N} = \frac{1,175V}{2,353k\Omega + 15k\Omega} = 68\mu A$$

E la caduta di tensione sul resistore? Semplicemente:

$$V_{RN} = I_{RN} \cdot R_N = 68\mu A \cdot 15k\Omega = 1,02V$$

Per esercizio, puoi verificare questi valori calcolando manualmente V_{RN} e I_{RN} .



Il nuovo resistore inserito all'intero del circuito equivalente di Thévenin della rete elettrica iniziale.

IL TEOREMA DI NORTON

Il teorema di Thévenin ha una sua 'forma duale', nota con il nome di 'teorema di Norton'. Si tratta di un ulteriore metodo di semplificazione che è, però, basato sull'impiego di componenti e strutture complementari a quelle che abbiamo appena affrontato. In pratica, il g.d.t. viene sostituito con un generatore di corrente, mentre il resistore viene posto in parallelo al generatore, anziché in serie (lo schema di un generico circuito equivalente Norton è mostrato a lato). Come avviene nel caso del teorema di Thévenin, anche qui il circuito originale va analizzato e in seguito semplificato a partire da due punti di osservazione.



STEP by STEP

EQUIVALENTE THÉVENIN

Nelle pagine precedenti abbiamo ricavato il modello equivalente di Thévenin partendo da un circuito teorico. Proviamo ora ad applicare quanto visto a una vera rete elettrica resistiva. Il materiale necessario sarà il seguente:

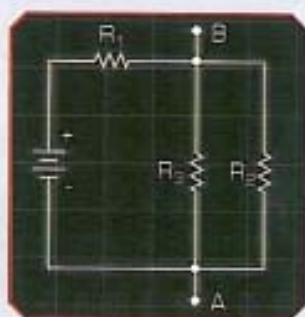


- 1 un portapile da 4 stilo con relative pile (meglio se ricaricabili)
- 2 una breadboard
- 3 un tester
- 4 resistori da 4,7 k Ω (ne serviranno due)
- 5 resistori da 1 k Ω (ne servirà uno)
- 6 fili per breadboard

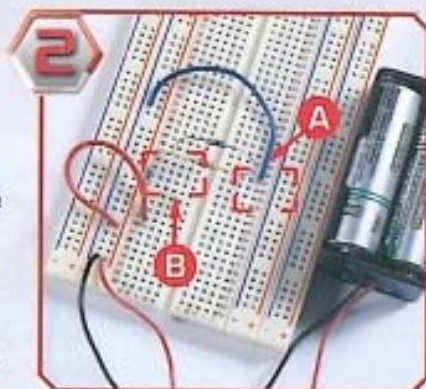
Prima di cominciare ad assemblare il circuito sulla breadboard, misura (utilizzando il tester, come già fatto nei precedenti fascicoli) i valori effettivi dei resistori e trascrivili su un foglio di carta per non dimenticarli. Nel nostro caso abbiamo rilevato le seguenti misure:

NOME RESISTORE	VALORE NOMINALE	VALORE EFFETTIVO
R ₁	4,7 k Ω	4,69 k Ω
R ₂	4,7 k Ω	4,67 k Ω
R ₃	1 k Ω	0,98 k Ω

Realizza, ora, il circuito mostrato a lato, prestando attenzione a come vai a disporre i resistori. Come già fatto nel precedente Workshop, collega i cavetti nero (polo negativo) e rosso (polo positivo) del portapile alle piste laterali della breadboard indicate rispettivamente



con il '-' e con il '+'. Per il montaggio dei resistori rispetta lo schema elettrico mostrato nella figura a sinistra. L'obiettivo dell'esperimento sarà quello di analizzare il circuito dai due punti A e B, in modo da dimensionare in maniera empirica generatore e resistenza del modello equivalente di Thévenin. Confronteremo poi i valori ottenuti sperimentalmente con quelli teorici.





3

Prima di iniziare la ricerca dell'equivalente Thévenin rileva con il tester l'unico valore sperimentale mancante: il **voltaggio del portatile**. Per far ciò, procedi come sempre, impostando il selettore del tester per la misurazione delle tensioni in corrente continua. Inserisci le sonde nelle piste laterali della breadboard a cui hai collegato i terminali di alimentazione: metti a contatto la **sonda nera** con uno dei socket della fila contrassegnata dal '-' e la **sonda rossa** con uno di quelli della fila contrassegnata dal '+'. Leggi dal display la misura effettuata e trascrivila. Nel nostro caso, le quattro pile utilizzate forniscono **5,60 V**.

Effettuate le misure sperimentali, procediamo **ricavando a livello teorico il modello equivalente di Thévenin** tra i punti A e B del circuito. Iniziamo calcolando il **valore del g.d.t. V_{TH}** . Osservando lo schema elettrico del circuito, si osserva che il voltaggio tra i punti A e B corrisponde alla caduta di tensione sulla coppia di resistori R_2 e R_3 , posti in parallelo tra loro. Calcoliamo, ripercorrendo la stessa procedura mostrata nelle pagine precedenti, la resistenza R_{23} ottenuta dal parallelo delle resistenze R_2 e R_3 :

4

La corrente che scorre nel g.d.t. sarà calcolabile utilizzando la legge di Ohm:

$$I = \frac{V_{IN}}{R_{TOT}} = \frac{V_N}{R_1 + R_{23}} = \frac{5,60 \text{ V}}{4690 \Omega + 810 \Omega} = 1,018 \text{ mA}$$

Nota l'intensità di corrente 'I', possiamo ricavare la caduta di tensione sulla resistenza equivalente R_{23} , che corrisponde al voltaggio del g.d.t. dell'equivalente Thévenin:

$$V_{AB} = V_{TH} = I \cdot R_{23} = 1,018 \text{ mA} \cdot 810 \Omega = 0,825 \text{ V}$$

Procediamo ora **'spegnendo' il g.d.t.** del circuito. Essendo un generatore di tensione, tale operazione si concretizza sostituendolo, nello schema circuitale iniziale, con un cortocircuito. Otteniamo, così, il circuito mostrato nello schema dello **Step 6** (pagina di fronte). Rimane da ricavare la **resistenza equivalente R_{TH}** calcolando la resistenza tra i punti A e B. Come si vede dallo schema, i resistori R_1 , R_2 e R_3 sono posti in parallelo tra loro:

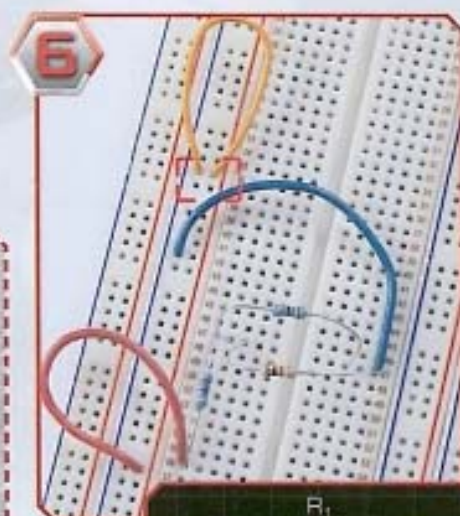
$$R_{TH} = R_{123} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{4690 \Omega} + \frac{1}{4670 \Omega} + \frac{1}{980 \Omega} \right)^{-1} = 690,7 \Omega$$

Verifichiamo, ora, se i nostri calcoli sono validi, osservando sperimentalmente il comportamento del circuito tra i due punti considerati.



5 Una volta che hai terminato i calcoli teorici con i valori da te rilevati, imposta il tester per la misurazione della tensione e poni le sonde ai capi del parallelo dei due resistori R_2 e R_3 , come mostrato nell'immagine. Nel nostro caso, la misura sperimentale sul blocco R_{23} ci ha fornito una caduta di tensione di **0,82 V**, un valore praticamente identico a quello stimato in precedenza per la tensione equivalente (la lieve differenza può essere dovuta, ad esempio, alla 'sensibilità' del tester).

Poni ora il circuito in **condizioni di passività** (schema in basso a destra). **Escludi il portatile** dal circuito e, successivamente, **collega le piste '+' e '-'** con un filo elettrico, come evidenziato nell'immagine qui a destra.



WARNING

PRIMA DI COLLEGARE LE PISTE '+' E '-' DELLA BREADBOARD, È INDISPENSABILE RIMUOVERE IL PORTABILE. Mettere a contatto diretto i due poli di un generatore di tensione senza un carico resistivo intermedio causa, nella pratica, una corrente la cui intensità è limitata solo dalle caratteristiche tecniche del g.d.t. Tale corrente produce un elevato surriscaldamento dei cavi e del generatore stesso, che può portare alla fusione delle guaine isolanti e persino alla generazione di fiamme (per effetto Joule).



7 Ora imposta il tester per la **misurazione delle resistenze**. Poni le sonde a contatto con i punti A e B del circuito e trascrivi il valore misurato. Il valore che stai per rilevare, non è altro che la resistenza equivalente al parallelo dei tre resistori R_1 , R_2 e R_3 . Nel nostro caso abbiamo misurato **0,69 k Ω** , una misura che si rivela (anche in questo caso) corrispondente ai nostri calcoli teorici della resistenza equivalente. Abbiamo così ottenuto in maniera empirica i due parametri del modello equivalente di Thévenin del circuito di partenza. Se vorrai conoscere il comportamento di un nuovo componente resistivo collegato tra i terminali A e B, ora non sarà più necessario considerare l'intera rete elettrica, ma potrai limitarti a studiare il comportamento del nuovo carico in serie al modello di Thévenin che hai appena ricavato.